Matemática Discreta I Segundo parcial	1er Apellido: ______________	20 de diciembre de 2018
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2º Apellido: ______________ Nombre: ______________ Número de matrícula:	Tiempo 1 hora 30 min **Nota:**

Ejercicio 1 (20 puntos)

a) (5 puntos) Calcula $[261]^{142}$ en $\mathbb{Z}_{50}$.

b) (10 puntos) Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} 10x \equiv 20 \pmod{42} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases}$$

Solución:

a) $\phi(50) = \phi(2 \cdot 5^2) = \phi(2) \cdot \phi(5^2) = 1 \cdot (5^2 - 5) = 20$

$[261]^{142} = [11]^{142} = [11]^{7 \cdot 20 + 2} = ([11]^{20})^7 \cdot [11]^2 = [1] \cdot [121] = [21]_{50}$

b) $\begin{cases} 10x \equiv 20 \pmod{42} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \equiv 10 \pmod{21} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{21} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases}$

El sistema tiene solución puesto que $mcd(21, 15)|(2 - 8)$.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{21} \\ x \equiv 8 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 8 \pmod{3} \\ x \equiv 8 \pmod{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ \cancel{x \equiv 2} \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$x = 2 \cdot (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5)_3^{-1} + 2 \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5)_7^{-1} + 3 \cdot (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 7)_5^{-1} + 3 \cdot 7 \cdot 5t = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 2 \cdot 15 \cdot 1 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 105t = 233 + 105t = [23]_{105}$

Ejercicio 2

La plantilla de un equipo de futbol consta de 25 jugadores, de los que 3 son porteros y 22 jugadores de campo.

a) (5 puntos) Si en cada encuentro se convoca a 18 jugadores, de los que al menos dos deben ser porteros. ¿Cuantas convocatorias diferentes se pueden realizar?

b) (5 puntos) La final de un torneo acaba empatada. El entrenador debe seleccionar de entre los once jugadores que han finalizado el partido, una lista ordenada de cinco jugadores para realizar cinco lanzamientos de penalty, un lanzamiento cada jugador. ¿Cuantas listas distintas podría elaborar?

c) (5 puntos) Al final de la temporada el equipo ha conseguido un total de 38 goles, ¿de cuántas formas posibles se podrán repartir esos 38 goles entre los 22 jugadores de campo?

Solución:

a) $C_{3,2} \cdot C_{22,16} = \binom{3}{2}\binom{22}{16}$

b) $V_{11,5} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

c) $CR_{22,38}$

Ejercicio 3

(5 puntos) Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \\ 3 \leq x_1 \leq 10, x_2 \geq 3, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $CR_{4,25-(3+3)} - CR_{4,25-(11+3)} = CR_{4,19} - CR_{4,11}$

Ejercicio 4

a) (5 puntos) En una probeta se detectan 5 bacterias. Transcurrida una hora el número de bacterias crece hasta 8. A partir de ese momento la población de bacterias crece cada hora una cantidad igual a dos veces la cantidad de bacterias que creció la hora anterior.

Sea a_n la cantidad de bacterias cuando hayan transcurrido n horas, encuentra una relación de recurrencia para a_n.

b) (10 puntos) Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales.

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n, \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 3, a_1 = 11 \end{cases}$$

Solución:

a) $a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-1} = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \forall n \geq 2$
$a_0 = 5, a_1 = 8$

b)

Ecuación característica: $C(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, con soluciones $x = 2$ y $x = 1$.

Solución general de la relación homogenea asociada: $h(n) = k_1 \cdot 1^n + k_2 \cdot 2^n$.

Solución particular de la recurrencia inicial: $p(n) = An2^n$, con $A = 2$.

Solución general de la relación no homogénea: $a(n) = k_1 \cdot 1^n + (k_2 + 2n) \cdot 2^n$.

Aplicando las condiciones iniciales: $k_1 = -1$ y $k_2 = 4$, por lo que la solución final es

$$\boxed{a(n) = -1 + (4 + 2n) \cdot 2^n} = (n+2)2^{n+1} - 1$$